

波动方程移动点源运动轨迹的重构方法^{*1)}

王怡凡

(南开大学数学科学学院, 天津 300071)

胡广辉

(南开大学数学科学学院, 核心数学与组合数学教育部重点实验室, 天津 300071)

摘 要

波动方程反问题旨在通过外部观测数据重构波源、介质等未知参数, 在许多工程领域都有广泛应用, 具有重要研究价值. 本文研究波动方程移动源运动轨迹的反演问题, 这对于精确获取空间飞行器的移动特性与飞行参数具有重要作用. 本文首先基于时域波动方程和傅里叶变换建立频率域移动源问题的数学模型, 然后通过最小二乘和非线性优化算法重构移动源的运动轨迹. 针对光滑的运动轨迹函数, 本文讨论频率、观测方向、级数展开项数等参数对于反演结果的影响. 在三维情形, 分别利用被白噪音污染的多频远场和近场观测数据进行反演. 通过大量数值实验, 我们发现算法具有良好的精确度以及一定噪音水平下的抗干扰性. 更进一步, 针对运动轨迹为非光滑函数和多尺度函数的情形本文也得到了较好的实验结果.

关键词: 波动方程; 移动点源问题; 反问题; 非线性优化.

MR (2020) 主题分类: 78A46, 35J05, 78M50.

DOI: 10.12288/szjs.s2025-1065

CSTR: 32034.14.szjs.s2025-1065

RECONSTRUCTION OF THE ORBIT OF A MOVING POINT SOURCE FOR WAVE EQUATIONS

Wang Yifan

(School of Mathematical Sciences, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Hu Guanghui

(School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071, China)

Abstract

Inverse problems for the wave equation aims to reconstruct unknown model coefficients such as sources and media through external observation data. It has wide applications in many engineering fields. This paper is concerned with the inverse moving point source problems, which plays an important role in accurately recovering the motion characteristics and flight parameters of a moving object. First, a mathematical model for the moving source problem in the frequency domain is established based on the the Fourier transform. Then, the trajectory of the moving source is reconstructed using least squares and nonlinear

* 2025 年 11 月 1 日收到.

¹⁾ 基金项目: 国家自然科学基金 (12425112), 天津市自然科学基金 (25JCZDJC00970) 和中央高校基本科研业务经费 (050-63253079) 资助.

optimization algorithms. For smooth motion trajectory functions, the effects of parameters such as frequency-band, observation directions, and the number of series expansion terms on the inversion results are discussed. In the three-dimensional case, inversion algorithm is performed using multi-frequency far-field and near-field observation data contaminated by white noise. Through extensive numerical experiments, it is found that the algorithm exhibits good accuracy and robustness under a certain level of noise interference. Furthermore, numerical experiments are also conducted for cases where the motion trajectory is a non-smooth function and a multi-scale function, yielding satisfactory results.

Keywords: Wave equation; Moving source problem; Inverse problem; Least-squares method.

2020 Mathematics Subject Classification: 78A46, 35J05, 78M50.

1. 引言

波动方程的反演理论在医学成像、污染源识别、天线工程等众多科学技术领域有着广泛的应用^[1,4,5]. 对于由波动方程控制的运动点源的追踪识别问题, 近年来科技工作者产生了愈发深厚的研究兴趣, 提出了各种反演算法来重构移动点源的轨道、轮廓和大小. 与大量静态物体散射的研究相比, 关于运动目标的正散射与逆散射理论的数学研究相对较少^[13], 其中 Stefanov^[20] 建立了运动障碍物的正散射和逆散射的部分数学理论方面.

关于移动点源的反演问题, Takashi Ohe 等人于 2011 年提出一种基于互易间隙泛函概念下的点源实时重构算法, 在点源数量、位置和量级均未知的情况下从边界测量中重建了三维标量波动方程的点源^[17], 并在 2019 年将其推广至多移动点/偶极子波源的情形, 推导出波源参数和互易间隙泛函之间的代数关系, 基于此进行重构^[18]. 之后 Nakaguchi 等人利用在单个观测点和时间获得的延迟电位及其导数观测值, 提出一种源位置和量级的直接识别方法^[16]. 此外优化技术也被广泛应用于逆问题的求解当中, Rashedi 等人通过 Ritz-Galekin 技术以及 satisfier 函数的应用对逆问题进行求解, 并得到条件 Hölder 稳定性估计^[19]. 在近期的研究当中, 多频因子分解方法被用来从稀疏个远场观测方向的数据恢复运动点源轨迹的信息^[8], 其它关于移动点源的采样性算法请见 [6, 10, 21]. 移动源运动轨迹重构的唯一性和稳定性结果请见 [12, 14].

与重构源函数的线性反问题相比, 移动轨迹的反演问题是一类特殊的非线性反问题. 虽然运动轨迹函数与源函数相比具有低维度的特征, 但是运动轨迹与测量数据之间呈现高度非线性的特性. 为了克服非线性导致的非唯一性, 多频方法在反源问题中的唯一性和稳定性研究中得到了成功应用^[2,3,15]. 与时域问题相比, 由于对频率的解析依赖性, 在频域仅采用某个区间的多频数据就能反演源函数^[9,11,12]. 虽然时域到频域的傅里叶变换要求无穷区间 $(0, \infty)$ 内的时域测量数据, 当源函数具有空间和时间上的紧支集时, 根据奇数维空间的惠更斯原理可以利用有限时间区间 $(0, T)$ 内的数据进行变换. 在偶数维 (例如二维) 情形, 虽然频率域近场模型同三维问题截然不同, 但远场模型描述的反问题却呈现同三维问题相似的特征. 受这些思想启发, 本文研究移动源问题的频域模型, 通过多频迭代算法反演三维空间中的运动轨迹函数. 主要结果如下: 提出一种基于多频观测数据和 Levenberg-Marquardt 算法的非线性优化迭代方法, 以三维光滑轨迹、二维非光滑轨迹及多尺度函数为主要算例, 通过轨迹函数参数化展开 (包括三角函数基与 B 样条基等) 构建非线性最小二乘模型进行数值求解. 本文通过大量数值实验, 验证了该方法在无噪以及含噪条件下反演的精确性及稳定性, 反演误差随噪音水平

呈增长趋势. 实验结果表明, 该算法在一定程度上能稳定重构较复杂的点源运动轨迹, 为波源定位问题提供了高精度的数值工具.

本文的主要结构如下: 第二节主要介绍移动源反演问题数学模型的建立. 第三节首先以二维光滑函数为例, 提出利用远场观测数据进行迭代反演的完整流程; 随后拓展至三维情形, 分别利用远场数据和近场数据进行反演. 第四节则考虑非光滑函数, 使用 B 样条基作为展开基函数进行反演, 同时使用该方法反演光滑轨迹函数. 最后在第五节中通过多频数据重构具有多尺度性质的轨迹函数.

2. 波动方程移动源散射问题的数学模型

假设全空间 \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) 中具有单位密度且各向同性的均匀介质. 考虑运动轨迹函数为 $f(t) : [t_{\min}, t_{\max}] \rightarrow \mathbb{R}^d \in C^1[t_{\min}, t_{\max}]$ 的移动点源, 其中 $t_{\max} > t_{\min} > 0$. 当 $d = 2$ 时, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$; 当 $d = 3$ 时, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. 令 $\Gamma = \{x : x = f(t), t \in [t_{\min}, t_{\max}]\}$ 表示运动轨迹. 本文中, 我们假设辐射源函数具有如下形式:

$$S(x, t) = \delta(x - f(t))\chi(t), \quad t \in [t_{\min}, t_{\max}]. \quad (2.1)$$

其中, δ 表示 Dirac 函数; $\chi(t)$ 表示时间段 $[t_{\min}, t_{\max}]$ 上的特征函数, 即

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_{\min}, t_{\max}], \\ 0, & t \notin [t_{\min}, t_{\max}]. \end{cases}$$

移动点源辐射的波场函数 $U(x, t)$ 满足如下非齐次波动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U + S(x, t), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = \partial_t U(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (2.2)$$

在本文中, 我们假设声波的速度为 1. (2.2) 的解可表示为基本解 $G_d(x, t)$ 与源项 $S(x, t)$ 的卷积:

$$U(x, t) = G_d(x, t) * S(x, t) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^d} G_d(x - y, t - \tau) S(y, \tau) dy d\tau, \quad (2.3)$$

其中

$$G_d(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}, & d = 2, \\ \frac{\delta(t - |x|)}{4\pi|x|}, & d = 3. \end{cases}$$

本文中, 关于 $u(x, k)$ 和 $U(x, t)$ 的一维 Fourier 变换与 Fourier 逆变换分别定义为

$$\begin{aligned} u(x, k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} U(x, t) e^{-ikt} dt = \mathcal{F}U(x, t), \\ U(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^d} u(x, k) e^{ikt} dk = \mathcal{F}^{-1}u(x, k). \end{aligned}$$

对时域问题 (2.2) 应用 Fourier 逆变换:

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = (ik)^2 \mathcal{F}^{-1}U = -k^2 u; \quad \mathcal{F}^{-1}(\Delta U) = \Delta(\mathcal{F}^{-1}U) = \Delta u.$$

令

$$s(x, k) = \mathcal{F}^{-1}S(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^+} \delta(x - f(t))\chi(t)e^{ikt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \delta(x - f(t))e^{ikt} dt,$$

则有:

$$\Delta u + k^2 u = -s(x, k). \quad (2.4)$$

对 (2.3) 作 Fourier 逆变换, 可得到方程 (2.4) 的解:

$$\begin{aligned} u(x, k) &= (\mathcal{F}^{-1}U)(k) = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}^{-1}G)(x - y, k)(\mathcal{F}^{-1}S)(y, k) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_d(x - y, k)s(y, k) dy, \end{aligned} \quad (2.5)$$

其中 $\Phi_d(x - y, k)$ 为 Helmholtz 方程 $\Delta u + k^2 u = 0$ 的基本解:

$$\Phi_d(x - y, k) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), & d = 2, \\ \frac{e^{ik|x - y|}}{4\pi|x - y|}, & d = 3, \end{cases} \quad x \neq y, x, y \in \mathbb{R}^d,$$

此处 $H_0^{(1)}(x)$ 为零阶第一类 Hankel 函数.

由于 Helmholtz 方程的基本解 Φ_d 满足 Sommerfeld 辐射条件, 并且 (2.4) 的右端项 $s(x, k)$ 关于空间具有紧支集, 辐射场 u 也满足 Sommerfeld 辐射条件, 即

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u - ik u) = 0, \quad r = |x|. \quad (2.6)$$

定义观测方向 $\hat{x} = \frac{x}{r} \in \mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$. 从而时域问题 (2.2) 可以转换成频域上的问题:

$$\begin{cases} \Delta u(x, k) + k^2 u(x, k) = -s(x, k), & x \in \mathbb{R}^d, \quad k > 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u - ik u) = 0, & r = |x|. \end{cases} \quad (2.7)$$

根据 Sommerfeld 辐射条件, u 在无穷远处有渐近性质

$$u(x) = c_d \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} \left\{ u^\infty(\hat{x}, k) + O(|x|^{-\frac{d-1}{2}}) \right\}, \quad \text{当 } |x| \rightarrow \infty, \quad (2.8)$$

其中 $u^\infty(\hat{x}, k)$ 称为 u 的远场模式, 系数 $c_d \in \mathbb{C}$ 为

$$c_d = \begin{cases} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}, & d = 2, \\ \frac{1}{4\pi}, & d = 3. \end{cases}$$

利用该渐近性质, 得到 Helmholtz 方程基本解的远场模式为 $\Phi_d^\infty(\hat{x}, k) = e^{-ik\hat{x} \cdot y}$. 更进一步得到频域问题的远场

$$\begin{aligned} u^\infty(\hat{x}, k) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik\hat{x} \cdot y} s(y, k) dy = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \delta(y - f(t)) e^{ikt} dt dy \\ &= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik(f(t) \cdot \hat{x} - t)} dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里 \hat{x} 表示观测方向. 由于源项 S 为实值的, 则 $s(x, -k) = \overline{s(x, k)}, u(x, -k) = \overline{u(x, k)}$ 对任意的 $k > 0$ 都成立.

本文主要讨论的移动源反演问题描述为: 假设 t_{\min} 与 t_{\max} 已知, 通过测量的远场数据 $\{u^\infty(\hat{x}_\ell, k) : \ell = 1, 2, \dots, L; k \in [k_{\min}, k_{\max}]\}$ 来重构点源的运动轨迹 $\{f(t) : t \in [t_{\min}, t_{\max}]\}$. 如果给定运动轨迹 $f(t)$ 的光滑性、导数约束以及初始条件时, 函数在有限时间区间内的轨道可以由有限多个观测点的多频数据唯一确定^[12].

3. 光滑轨迹函数的重构算法

本节针对光滑运动轨迹函数进行反演, 给出不同维度和观测数据下的反演结果. 首先针对二维空间的运动轨迹函数, 利用远场数据构建迭代反演的完整流程; 更进一步拓展至三维情形; 之后利用近场观测数据进行重构, 并与远场数据的结果进行对比.

3.1. 基于二维远场数据的反演方法

在二维空间中, 远场观测方向在单位圆上进行选取, 即 $\hat{x} = (\sin \theta, \cos \theta)$, 其中 $\theta \in (0, 2\pi]$ 为观测角. 选取观测方向 $\hat{x}_\ell = (\hat{x}_{\ell,1}, \hat{x}_{\ell,2}) (\ell = 1, 2, \dots, L)$, 则得到多个观测方向下的远场观测数据: $\{Y_\ell(k) : k \in [k_{\min}, k_{\max}]\}_{\ell=1}^L$. 在二维情形, 我们取 $f_1(t) = t$, 将轨迹函数参数化为 $f(t) = (t, f_2(t))$. 令 $k_1 = k_{\min}, k_m = k_{\max}, k_j = k_1 + (j-1) * h, h = \frac{k_m - k_1}{m}$, 则根据 (2.9) 远场观测数据表示为

$$Y_\ell(k_j) = u^\infty(\hat{x}_\ell, k_j) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik_j(f(t) \cdot \hat{x}_\ell - t)} dt. \quad (3.1)$$

移动源反演问题描述为: 通过已知多个观测方向下的多频远场观测数据 $\{Y_\ell(k_j) : \ell = 1, 2, \dots, L; j = 1, 2, \dots, m\}$, 反演二维运动轨迹函数 $\{f(t) = (t, f_2(t)) : t \in [t_{\min}, t_{\max}]\}$.

由于 $f_2(t) \in C^1(t_{\min}, t_{\max})$, 选择 $L^2(t_{\min}, t_{\max})$ 的一组基函数 $\{\phi_i(t) : i = 1, 2, \dots\}$, 可以将 $f_2(t)$ 近似展开为

$$f_2(t) \approx X \cdot \Phi(t),$$

其中 $X = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 为待确定的参数, 此处 $n \in \mathbb{N}$ 称为轨迹函数 $f(t)$ 的截断参数, $\Phi(t) = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)(t)$. 定义

$$\tilde{f}_l(X, k) := \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik[\hat{x}_l \cdot (t, X \cdot \Phi(t)) - t]} dt \in \mathbb{C}, \quad \ell = 1, 2, \dots, L,$$

以及

$$F(X) := (\tilde{f}_1(X, k_1), \dots, \tilde{f}_1(X, k_m), \dots, \tilde{f}_L(X, k_1), \dots, \tilde{f}_L(X, k_m))^T \in \mathbb{C}^{m \times L}.$$

那么, F 是一个关于参数 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的非线性向量值函数.

移动点源轨迹函数的反演问题转变为参数 $\{a_i\}_{i=1}^n$ 的重构问题. 对应的最小二乘问题描述为

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \|Y - F(X)\| = \min_{X \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^L \left| \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik_j[\hat{x}_l \cdot (t, X \cdot \Phi(t)) - t]} dt - Y_l(k_j) \right|. \quad (3.2)$$

为求解非线性最小二乘问题 (3.2), 本文采用 Levenberg-Marquardt 算法. Levenberg-Marquardt 算法是一种经典的非线性最小二乘优化算法, 它融合了高斯-牛顿法的快速收敛性

和梯度下降法的稳定性, 通过自适应阻尼因子在二者之间智能切换, 从而在收敛速度和稳定性之间取得平衡^[7]. 该算法收敛稳定性较好, 适合中小规模的非线性优化. Levenberg-Marquardt 算法主要步骤如下:

算法 3.1. Levenberg-Marquardt 算法

输入: 初始点 X_0 ; 终止控制常数 ε ; 多频远场观测数据 Y ; 非线性向量值函数 F ;

阻尼系数初始值 $\lambda_0 = 10^{-3}$; 阻尼调整因子 $\mu = 10$; 最大迭代次数 t_{\max}

输出: 展开系数 $X \in \mathbb{R}^n$

Set $\varepsilon_0 = Y - F(X_0)$, $t = 0$, $X = X_0$, $\ell = 0$

while $t < t_{\max}$ **do**

$t = t + 1$

$\ell = \ell + 1$

$N_\ell = J_\ell^T J_\ell + \lambda_\ell I$, 其中 J_ℓ 是 $Y - F(X_\ell)$ 的雅可比矩阵

$\varepsilon_\ell = Y - F(X_\ell)$

Solve $N_\ell v_\ell = J_\ell^T \varepsilon_\ell$

if $\|v_\ell\| < \varepsilon$ **then**

return X

else

$X_{\ell+1} = X_\ell + v_\ell$

if $\|Y - F(X_{\ell+1})\| < \varepsilon$ **then**

$X = X_{\ell+1}$

$\lambda_{\ell+1} = \frac{\lambda_\ell}{\mu}$

else

$\lambda_{\ell+1} = \lambda_\ell \cdot \mu$

end if

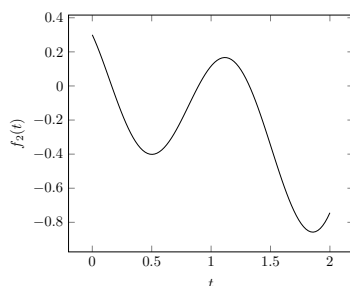
end if

end while

return X ;

STOP.

下面以简单的二维光滑运动轨迹函数 $f(t) = (t, -1 + 1.5 \sin(t) + \cos(2t) + 0.3 \cos(3t) - 0.75 \sin(4t))$, $t \in [0, 2]$, 为例展示重构结果. 本例中的运动轨迹如下图所示



取 $k_1 = 1, k_m = 16, m = 10, n = 9$, 此时基函数选取为三角基函数, 即 $\{1, \sin t, \cos t, \dots\}$.

取最小二乘问题求解的初始猜测为 $X_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^9$, 我们得到在不同观测方向个数 (L) 下的反演结果, 如图 1 所示:

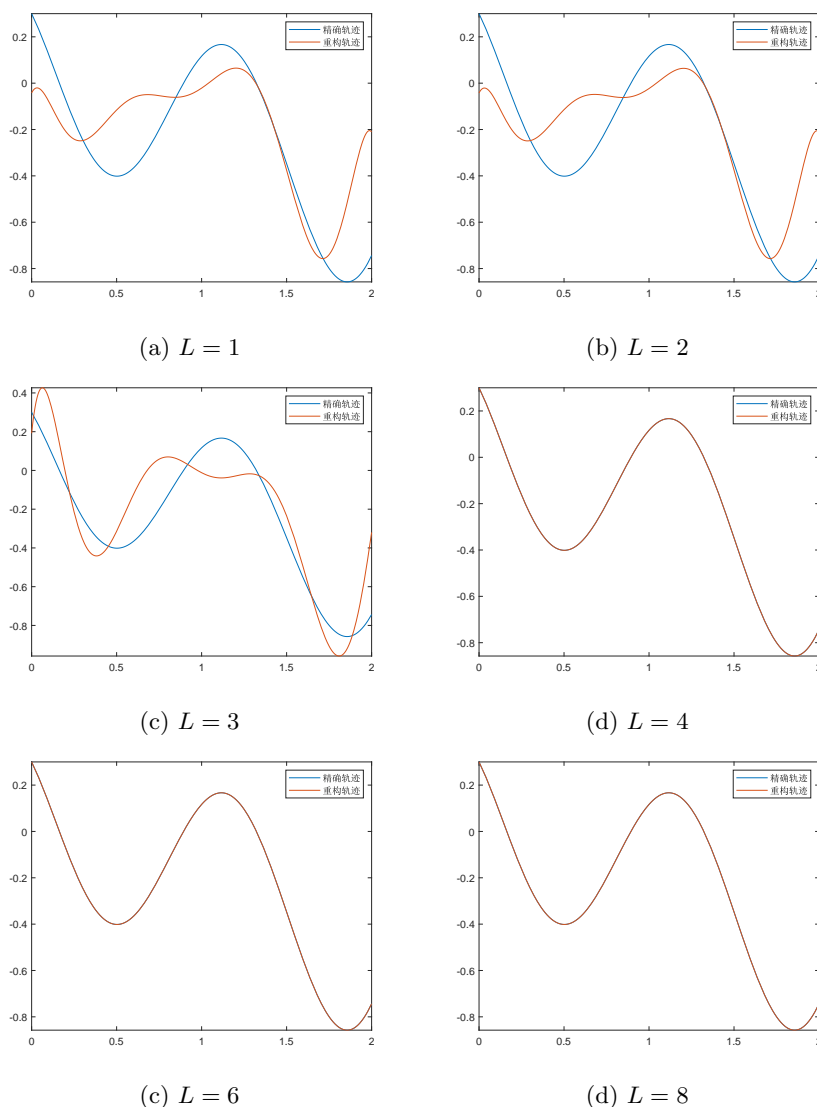


图 1 二维情形依据不同观测方向个数的反演结果

对应的反演结果误差如下:

表 1 不同观测方向个数的反演误差 (∞ -范数)

观测方向个数	误差
$L = 1$	2.0659e+00
$L = 2$	2.0708e+00
$L = 3$	1.5441e+00
$L = 4$	1.8958e-09
$L = 6$	4.5400e-09
$L = 8$	1.3756e-09

可以发现, 观测方向选取太少时, 并不能得到很好的结果. 当选取 $L = 4$ 个观测方向进行反演时得到的结果误差较小, 虽然此时的初始猜测并不十分准确. 显然, 随着观测方向个数的增多, 反演的结果会越来越好.

下面我们考虑展开项系数对结果的影响, 其余参数不变. 取 $L = 4$, 将 Fourier 级数的截断参数分别取为 $n = 3, 5, 7, 9$, 我们得到如图 2 的结果:

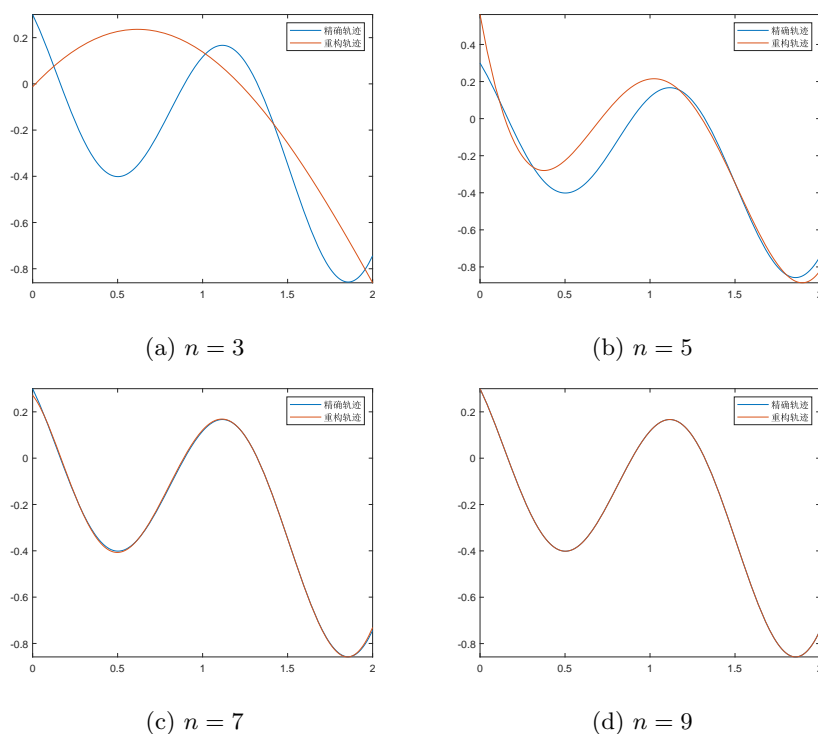


图 2 不同截断参数下的二维反演结果

反演结果误差如下:

表 2 不同截断参数下的反演误差 (∞ -范数)

展开系数个数	误差
$n = 3$	3.1059e+00
$n = 5$	1.1852e+00
$n = 7$	5.4105e-02
$n = 9$	1.8958e-09

观察结果可以发现, 针对当前算例, 当使用的展开项系数个数逐渐增多时, 反演的精确性也越来越好. 但如果选取系数个数过多时, 可能会出现过拟合现象, 导致精确度下降. 从而在反演过程中, 需要经过多次实验选择合适的展开项个数的范围.

最后, 只改变频率选取范围, 可以对比不同频带数据的反演结果, 结果如图 3 所示.

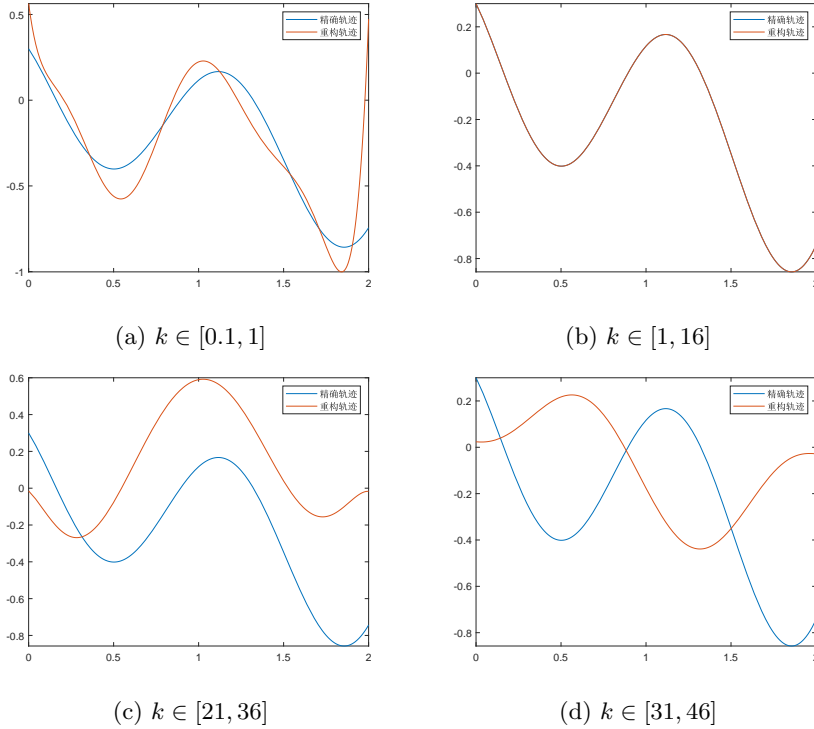


图 3 不同频率范围下的二维反演结果

本节中算例选取为一个周期函数, 可以发现其频率落于区间 $[1, 16]$ 之间, 从而利用对应频率下得到的远场观测数据进行反演得到的结果优于其它结果.

3.2. 基于三维远场数据的反演结果

我们从三维直角坐标系单位球面上选取观测方向 $\hat{x} = (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$, $\theta \in (0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$. 在每一个观测方向 \hat{x}_ℓ 上, 我们记多频观测数据为 $\{Y_\ell(k_j)\}_{j=1}^m$. 移动源反演问题描述为: 通过已知多个观测方向下的多频远场观测数据 $\{Y_\ell(k_j) : j = 1, 2, \dots, m\}$, 反演三维运动轨迹函数 $\{f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) : t \in [t_{\min}, t_{\max}]\}$.

在三维情形下, 分别选取函数族 $\{\phi_{1j}\}_{j=1}^{n_1}$, $\{\phi_{2j}\}_{j=1}^{n_2}$, $\{\phi_{3j}\}_{j=1}^{n_3}$, 对各分量进行级数展开:

$$f_i(t) \approx \sum_{j=1}^{n_i} a_{ij} \phi_{ij}(t).$$

记 $X = (a_{11}, \dots, a_{1n_1}, \dots, a_{3n_3}) \in \mathbb{R}^n$ ($n = n_1 + n_2 + n_3$) 为运动轨迹函数三个分量的展开系数. 将反源问题转换为最小二乘问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^L \left| \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \exp \left(-ik_j \left[\hat{x}_{\ell,1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_1} a_{1i} \phi_{1i} \right) + \hat{x}_{\ell,2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_2} a_{2i} \phi_{2i} \right) + \hat{x}_{\ell,3} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n_3} a_{3i} \phi_{3i} \right) - t \right] \right) dt - Y_\ell(k_j) \right|^2. \quad (3.3)$$

在数值实验中, 我们取运动轨迹函数为

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = (\cos t, \sin t, \sin 2t), \quad t \in [0, \pi], \quad (3.4)$$

则在最小二乘问题 (3.3) 中, $t_{\min} = 0, t_{\max} = \pi$. 具体运动轨迹如下图 4:

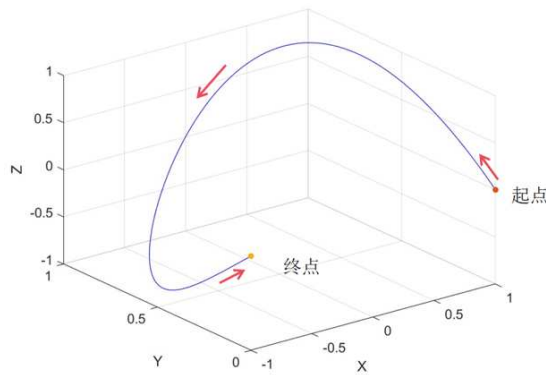


图 4 三维运动轨迹函数 (3.4)

在最小二乘问题求解过程中, 初始猜测 X_0 的选取对于求解的准确度与求解效率有着很大的影响. 在实际计算过程中, 可以通过选取多个观测方向来减少初始猜测的影响. 在本算例中, 远场观测方向如下:

表 3 三维算例的多个远场观测方向

ℓ	角度		坐标分量		
	θ	φ	$\hat{x}_{\ell,1}$	$\hat{x}_{\ell,2}$	$\hat{x}_{\ell,3}$
1	45°	45°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
2	135°	45°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	225°	45°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	315°	45°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
5	315°	45°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$

此时, 观测方向可以表达为:

$$Y_\ell(k_j) = u^\infty(\hat{x}_\ell, k_j) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik_j[\hat{x}_{\ell,1}f_1(t) + \hat{x}_{\ell,2}f_2(t) + \hat{x}_{\ell,3}f_3(t) - t]} dt,$$

对于 $f(t)$ 的三个分量, 均采用三角函数族 $\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots\} = \{\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_j(t), \dots\}$ 作为基函数进行展开, 即

$$\begin{cases} f_1(t) \approx a_{10} + \sum_{j=1}^{n_1} (a_{1j} \sin jt + b_{1j} \cos jt), \\ f_2(t) \approx a_{20} + \sum_{j=1}^{n_2} (a_{2j} \sin jt + b_{2j} \cos jt), \\ f_3(t) \approx a_{30} + \sum_{j=1}^{n_3} (a_{3j} \sin jt + b_{3j} \cos jt). \end{cases}$$

令

$$f_{\ell}(X, k_j) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \exp \left\{ -ik_j \left[\hat{x}_{\ell,1} * \sum_{i=1}^{n_1} a_{1i} \phi_{1i} + \hat{x}_{\ell,2} * \sum_{i=1}^{n_2} a_{2i} \phi_{2i} + \hat{x}_{\ell,3} * \sum_{i=1}^{n_3} a_{3i} \phi_{4i} - t \right] \right\} dt.$$

最小二乘问题的目标是重构运动轨迹函数各分量的级数展开系数 $X = (a_{11}, \dots, a_{1n_1}, \dots, a_{3n_3}) \in \mathbb{R}^n$.

在求解过程中选取各参数如下: 频率 $k_1 = 1, k_m = 16, m = 10, n_1 = n_2 = 3, n_3 = 5$. 最小二乘问题的初始猜测取 $X_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{11}$, 得到的反演结果如图 5.

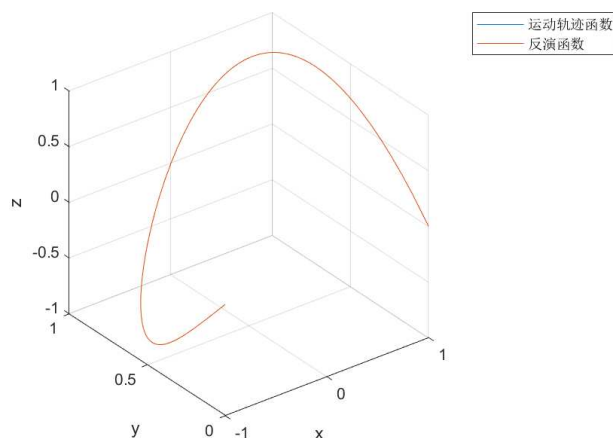


图 5 轨迹函数 (3.4) 在多个观测方向下的反演结果

同时, 可以得到在不同时刻 $t \in [0, \pi]$ 的反演误差, 结果如图 6.

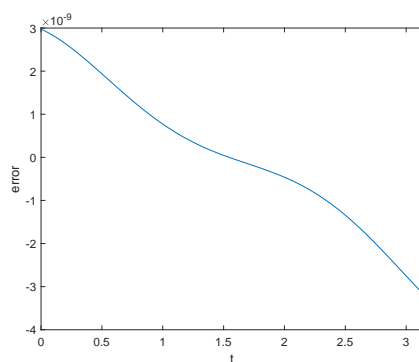


图 6 轨迹函数 (3.4) 在多个观测方向下的反演误差

在上述反演过程中, 选取的观测数据是假设在环境中不存在其他噪音干扰时得到的, 但在实际运用的过程中, 观测数据不可避免地会携带噪音. 接下来将人为添加噪音, 观察反演结果在一定噪音和误差的干扰下是否能保持稳定性. 定义 $Y_{\delta} = Y + Y\delta R$, 其中 Y 为原始观测数据, Y_{δ} 是被噪音污染的数据, δ 为噪音水平, R 是 $(-1, 1)$ 内的随机数. 针对远场数据, 分别添加

$\delta = 5\%, 10\%, 15\%, 20\%, 30\%$ 水平的噪音, 并采用最小二乘法进行求解, 其它参数选取均与无噪音时相同, 得到的反演结果如图 7.

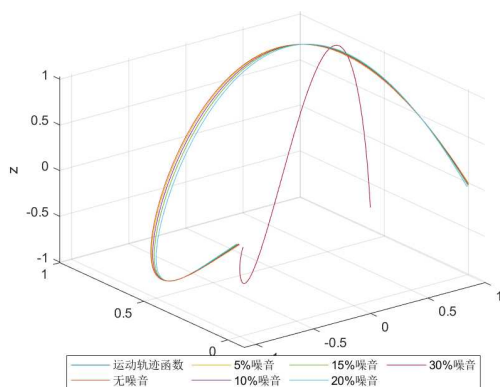


图 7 不同噪音影响下轨迹函数 (3.4) 在多个观测方向下的反演结果

同样地, 可以得到各个时刻的反演误差如图 8 与表 4 所示.

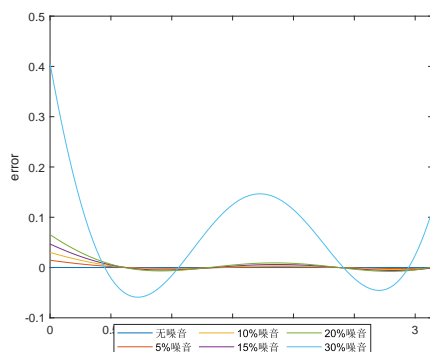


图 8 不同噪音影响下轨迹函数 (3.4) 在多个观测方向下的反演误差

表 4 不同噪音水平下的反演误差 (∞ -范数)

噪音水平	误差
无噪音	1.9534e-10
5%	1.4494e-02
10%	3.0070e-02
15%	4.6832e-02
20%	6.5419e-02
30%	4.0606e-01

通过该数值实验结果可以发现, 当选取 5 个远场观测方向时, 能够很好地反演出物体的运动轨迹函数, 并且反演结果在噪音影响下具有很好的稳定性.

3.3. 基于三维近场数据的反演结果

模型建立过程中, 远场模式的表达式推导依赖于 Sommerfeld 辐射条件, 该条件明确了 u 在无穷远处需满足的渐近性, 由此可进一步确定远场模式的数学形式. 如果不选择使用远场的观测数据进行反演, 在运动轨迹函数附近选择观察点位, 通过式 (2.5) 可得到近场观测数据. 依然选取 3.2 节中的算例 (3.4), 当 $d = 3$ 时有近场表达式:

$$\begin{aligned} u(x, k) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi_3(x-y, k) s(y, k) dy = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \delta(y-f(t)) e^{ikt} dt dy \\ &= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{e^{ik|x-f(t)|}}{4\pi|x-f(t)|} e^{ikt} dt = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{e^{ik[|x-f(t)|+t]}}{4\pi|x-f(t)|} dt, \end{aligned} \quad (3.5)$$

其中 $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$. 选取观测点 $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}) (i = 1, 2, \dots, T)$, 得到多频近场观测数据

$$Y_i(k_j) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{e^{ik_j[|x_i-f(t)|+t]}}{4\pi|x_i-f(t)|} dt, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

则此时最小二乘问题变为 (3.6), 其中 $t_{\min} = 0, t_{\max} = \pi$.

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^T \left| \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} \frac{e^{ik_j[|x_s - [\sum_{i=1}^{n_1} a_{1i}\phi_{1i}, \sum_{i=1}^{n_2} a_{2i}\phi_{2i}, \sum_{i=1}^{n_3} a_{3i}\phi_{3i}]|+t]}}{4\pi|x_s - [\sum_{i=1}^{n_1} a_{1i}\phi_{1i}, \sum_{i=1}^{n_2} a_{2i}\phi_{2i}, \sum_{i=1}^{n_3} a_{3i}\phi_{3i}]|} dt - Y_s(k_j) \right|^2. \quad (3.6)$$

观测点选取如表 5, 其余参数与远场情形相同.

表 5 观测点数据集

i	观测点坐标		
	$x_{i,1}$	$x_{i,2}$	$x_{i,3}$
1	2.0	2.0	2.0
2	2.0	2.0	-1.0
3	-1.0	2.0	1.0
4	-2.0	1.0	-3.0
5	1.0	-2.0	-0.5
6	-1.0	-0.5	1.0
7	0.5	1.5	0.9
8	0.0	2.0	1.2
9	-0.5	2.5	1.5
10	-0.7	3.0	1.8
11	-0.5	3.5	2.1

分别对观测数据添加水平为 $\delta = 1\%, 2\%, 4\%, 8\%, 10\%$ 的噪音, 运用最小二乘方法得到的反演结果如图 9.

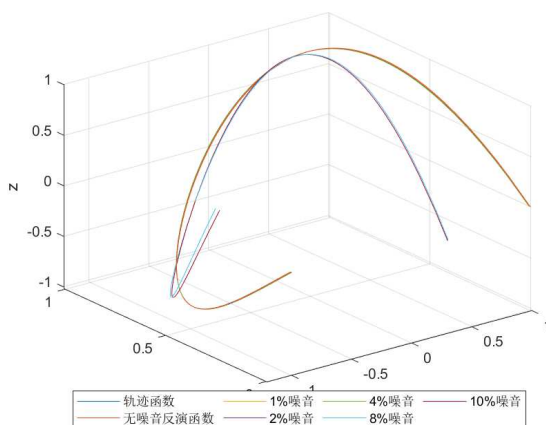


图 9 不同噪音影响下轨迹函数 (3.4) 在多个观测点下的反演函数

同样地, 可以计算不同时刻的误差 (如图 10 与表 6 所示).

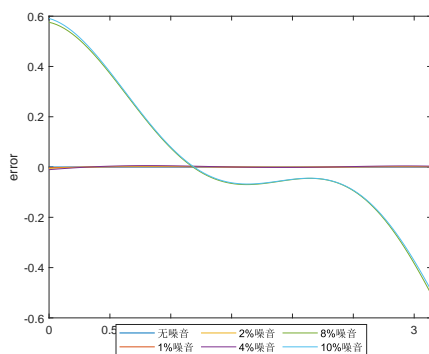


图 10 不同噪音影响下轨迹函数 (3.4) 在多个观测点下的反演误差

表 6 不同噪音水平下的反演误差 (∞ -范数)

噪音水平	误差
无噪音	3.7017e-08
1%	1.4788e-03
2%	2.9233e-03
4%	5.6650e-03
8%	5.7590e-01
10%	5.9109e-01

选用近场观测数据时, 要想得到较好的观测结果, 需要选择较多的观测点获取相应的数据; 并且反演结果对于噪音的干扰能力差于基于远场数据的反演结果.

4. 非光滑轨迹函数的重构算法

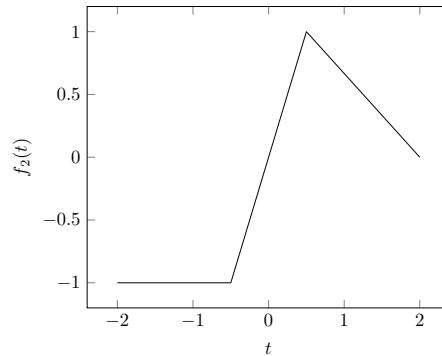
在上一部分观察到, 针对三维情形的光滑运动轨迹函数, 选取三角基函数的 Levenberg-Marquardt 算法的精确度和稳定性较好. 本节针对分片线性的运动轨迹函数设计反演算法, 与光滑情形最主要的差别在于近似展开基函数的选取. 在原有反演算法的基础上, 本节选择 B 样条基函数作为基函数, 实现基于二维远场观测数据下的反演, 同时将该重构算法应用于光滑函数的反演.

4.1. 基于 B 样条基函数的二维非光滑轨迹反演结果

假设二维分片线性运动轨迹函数 $f(t) = (t, f_2(t))(t \in [-2, 2])$ 具有以下形式:

$$f_2(t) = \begin{cases} -1, & -2 \leq t < -0.5, \\ 2t, & -0.5 \leq t < 0.5, \\ \frac{-2t}{3} + \frac{4}{3}, & 0.5 \leq t < 2. \end{cases}$$

具体图像如下图.



在对运动轨迹函数进行反演的过程中, 很重要的一点是需要对源函数基于一组基函数进行展开. 对于非光滑函数的拟合近似, 选择 B 样条进行拟合. 定义 T 为非光滑函数定义域内节点的个数, $S_k(x)$ 为非光滑函数的拟合多项式, n 为多项式 $S_k(x)$ 的次数. 采用 B 样条拟合时, 需要选取节点:

$$x_{-n}, \dots, x_0, x_1, \dots, x_T, \dots, x_{T+n}.$$

其中, $\{x_0, \dots, x_T\}$ 为函数定义域内的节点; $\{x_{-n}, \dots, x_{-1}\}$ 与 $\{x_{T+1}, \dots, x_{T+n}\}$ 为虚拟点, 通常选取为重合点, 即

$$x_{-n} = \dots = x_{-1} = x_0, \quad x_{T+1} = \dots = x_{T+n} = x_T.$$

定义基函数 $B_{i,n+1} = (x_{i+n+1} - x_i)g[x_i, \dots, x_{i+n+1}]$, 其中

$$g(t) = (t - x)_+^n = \begin{cases} (t - x)^n, & t \geq x, \\ 0, & t < x, \end{cases}$$

$g[x_1, \dots, x_m]$ 为差商算子, 从而得到 B 样条基函数的表达式

$$B_{i,n+1} = (x_{i+n+1} - x_i) \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(x_{j+i} - x)_+^n}{\prod_{l=0, l \neq j}^{k+1} (x_{j+i} - x_{j+l})}.$$

由于 B 样条基函数的表达式过于复杂, 不便实现, 我们选择 Cox-deBoor 递推关系式进行定义:

$$B_{i,n+1} = \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} B_{i,n}(x) + \frac{x_{i+n+1} - x}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} B_{i+1,n}(x). \quad (4.1)$$

其中: $B_{i,1} = \begin{cases} 1, & x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin [x_i, x_{i+1}), \end{cases}$ ($i = -n, \dots, T-2$), $B_{T-1,1} = \begin{cases} 1, & x \in [x_{T-1}, x_T), \\ 0, & x \notin [x_{T-1}, x_T). \end{cases}$ 以 $n=1$ 为例绘制出样条基函数 $B_{i,n+1}$ ($i=1, 2, 3, 4$) 的图像如图 11 所示.

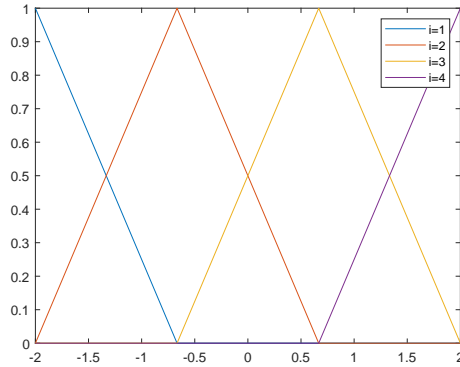


图 11 样条基函数 $B_{i,n+1}$ ($n=1$) 的图像

可以发现, 一阶的 B 样条基函数就是帽子基函数. 在反演本节算例中, 我们选用一阶样条基函数对运动轨迹进行展开, 对于其它非光滑函数, 则需视情况选取合适阶数的样条基.

针对远场模式 $u^\infty(\hat{x}, k) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik \cdot \hat{x} \cdot f(t) - t} dt$, 选取观测方向 \hat{x}_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, L$), 频率 k_j ($j = 1, 2, \dots, m$). 对应地 $\{Y_\ell(k_j)\}_{j=1}^m$ 为 \hat{x}_ℓ 的观测数据, $Y = (\{Y_1(k_j)\}_{j=1}^m, \dots, \{Y_L(k_j)\}_{j=1}^m) \in \mathbb{C}^{m \times L}$ 为多频远场的观测数据. 对于非光滑轨迹 $f(t)$ 第二个分量 $f_2(t)$, 有拟合多项式 $S_k(t)$, 可以对该拟合多项式进行 B 样条展开:

$$f_2(t) \approx S_k(t) = \sum_{i=-n}^{T-1} c_i B_{i,n+1}(t),$$

从而定义:

$$f_\ell(X, k_j) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik_j [\hat{x}_\ell \cdot (t \cdot \sum_{i=-n}^{T-1} c_i B_{i,n+1}(t)) - t]} dt.$$

令 $F(X) = (\{f_1(X, k_j)\}_{j=1}^m, \dots, \{f_L(X, k_j)\}_{j=1}^m)$ 为非线性向量函数组, 其中 $X = (c_{-n}, \dots, c_{T-1}) \in \mathbb{R}^{n+T}$, $t_{\min} = -2$, $t_{\max} = 2$. 于是, 最小二乘问题变为:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{n+T}} \|Y - F(X)\| = \min_{X \in \mathbb{R}^{n+T}} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^L \left| \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik_j [\hat{x}_\ell \cdot (t \cdot \sum_{i=-n}^{T-1} c_i B_{i,n+1}(t)) - t]} dt - Y_\ell(k_j) \right|^2. \quad (4.2)$$

在本例中, 我们选取远场观测方向 $\hat{x} = (\sin \theta, \cos \theta) (\theta \in (0, 2\pi])$ 如下:

表 7 二维非光滑的多个远场观测方向

ℓ	θ	坐标分量	
		$\hat{x}_{\ell,1}$	$\hat{x}_{\ell,2}$
1	90°	0	1
2	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
4	270°	0	-1
5	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
7	330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
8	240°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
9	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

对于其它参数, 频率选取为 $k_1 = 1, k_m = 16, m = 10, T = 8, n = 1$. 从而最小二乘的目标是求解出 B 样条展开的系数 $X = (c_{-1}, \dots, c_7)$. 选取初始猜测为 $X_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^9$, 同样对于远场观测数据分别添加 1%, 2%, 4%, 8%, 10% 水平的噪音, 得到的反演结果如图 12.

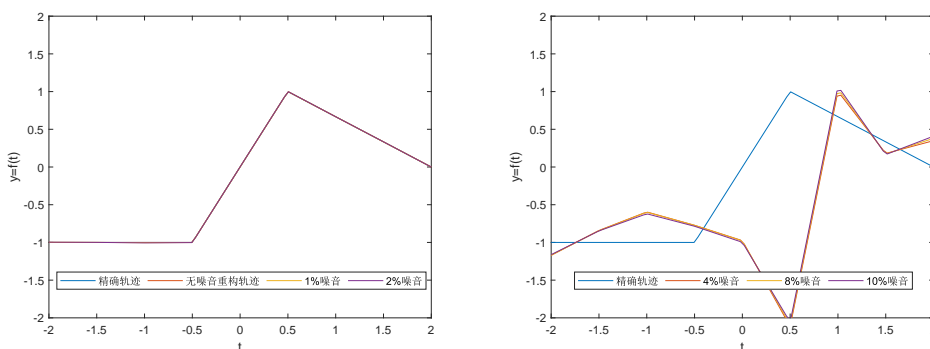


图 12 不同噪音影响下非光滑函数在多个观测方向下的反演

更直观地, 得到在不同噪音水平下的反演误差:

表 8 非光滑函数反演不同噪音水平下的误差

噪音水平	误差
无噪音	2.4421e-07
1%	3.7370e-03
2%	7.5474e-03
4%	3.0796e+00
8%	3.4033e+00
10%	3.7034e+00

4.2. 基于 B 样条基函数的二维光滑轨迹反演结果

在上面我们讨论了针对二维分片线性函数的重构算法, 提出使用 B 样条作为基函数的 Levenberg- Marquardt 算法. 在本节我们将探索 B 样条基在光滑函数的反演中起到的作用, 并通过对比 3.1 节中的算法总结该方法的优缺点.

数值算例选取与 3.1 节保持一致: $f(t)=(t, -1+1.5 \sin(t)+\cos(2t)+0.3 \cos(3t)-0.75 \sin(4t))$, 取 $k_1=1, k_m=16, m=10, T=8$, 初始猜测 $X_0=0 \in \mathbb{R}^{T+n}$, 观测方向 $L=4$. 采用 B 样条基作为 $f_2(t)$ 的展开基函数, 由于 $f_2(t)$ 为周期函数, 需要寻找合适的 B 样条基的阶数 n . 分别取 $n=1, 2, 3$, 得到的反演结果如图 13.

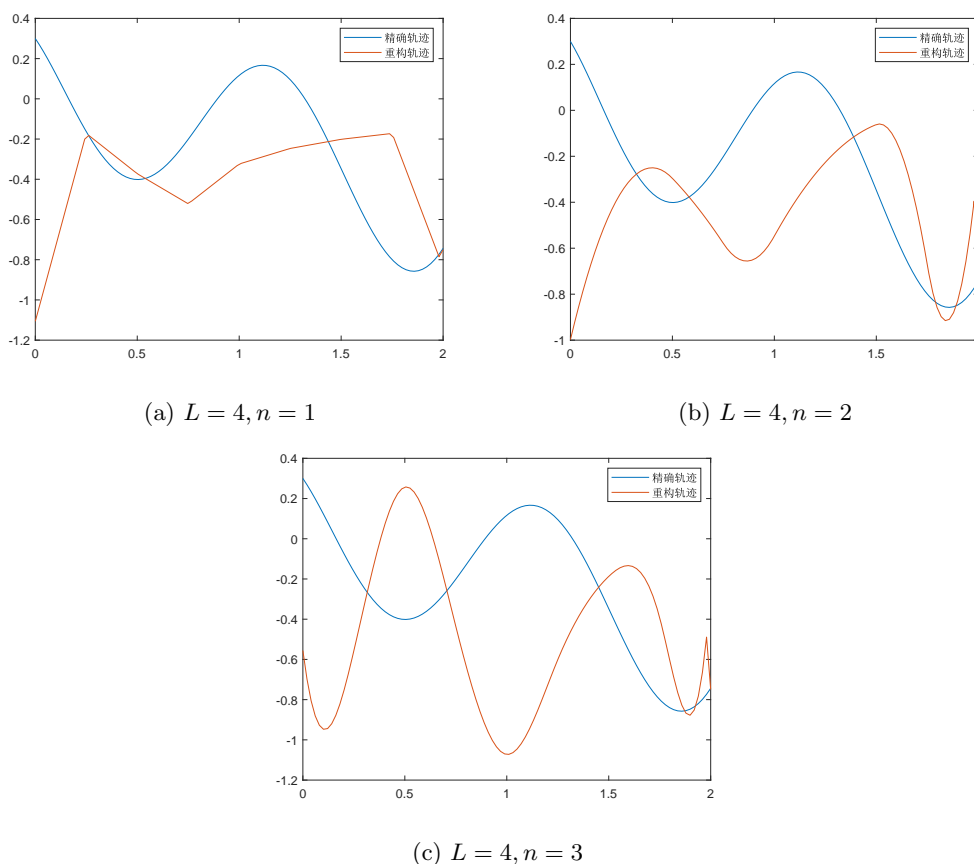


图 13 光滑函数使用样条基在不同基函数阶数下的反演结果

在观测方向选取较少时, 并不能取得很好的反演结果. 通过实验发现, 当增加实验方向至表 9, 得到的反演结果如图 14 所示.

当观测方向选取为 11 个时, 采用二阶 B 样条作为基函数能得到较好的反演结果. 添加 1%, 2%, 4%, 8%, 10% 的噪音, 在不同噪音水平下的反演结果如图 15 所示, 对应的误差如表 10 所示.

表 9 二维光滑基于样条基反演的多个远场观测方向

ℓ	θ	坐标分量	
		$\hat{x}_{\ell,1}$	$\hat{x}_{\ell,2}$
1	90°	0	1
2	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
3	180°	1	0
4	315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
5	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
6	225°	-1	0
7	135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
8	330°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
9	330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
10	240°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
11	150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

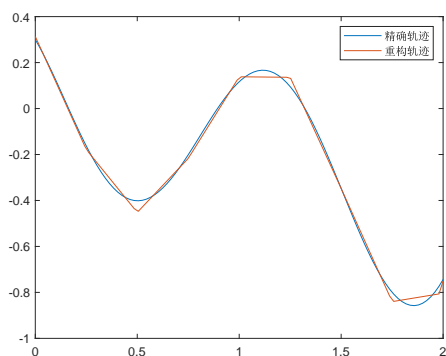
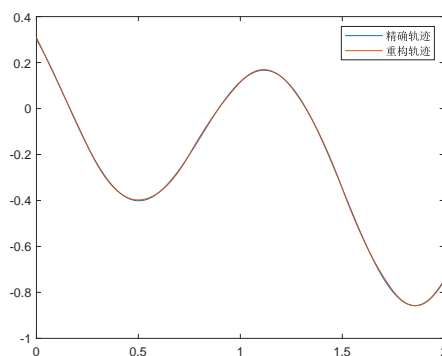
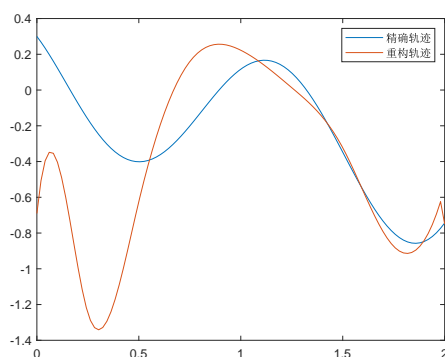
(a) $L = 11, n = 1$ (b) $L = 11, n = 2$ (c) $L = 11, n = 3$

图 14 光滑函数使用样条基在不同基函数阶数下的反演结果

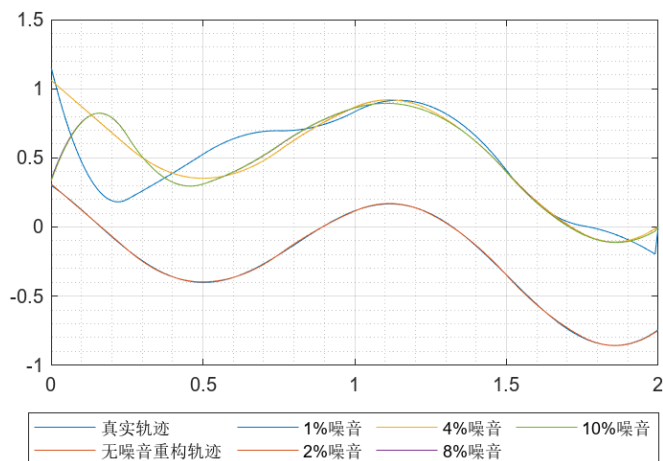


图 15 光滑函数使用样条基在不同噪音下的反演结果

表 10 光滑函数使用样条基在不同噪音下的误差

噪音水平	误差
无噪音	1.0112e-02
1%	5.0504e-01
2%	1.0616e-02
4%	1.1039e-02
8%	7.0464e-01
10%	7.1764e-01

通过数值实验的过程和结果可以发现, 利用 B 样条作为基函数进行非光滑函数和光滑函数的反演时, 需要更多的远场观测方向来保证好的精确性结果. 并且对于噪音的抗干扰能力相对较弱, 要想提高抗干扰性, 需要更多的观测方向对应的远场观测数据.

5. 多尺度轨迹函数的重构算法

多尺度函数能够在不同尺度 (如时间、空间和频率的粗细层次) 上对信号、图像或数据进行分解、表示或逼近. 其核心作用在于通过分层处理不同尺度的信息, 实现对复杂数据的高效分析、建模和计算. 其应用广泛, 涵盖信号处理、图像分析、数值模拟、物理建模等多个领域. 在本节, 将考虑移动点源运动轨迹函数为多尺度函数的情形. 在光滑函数反演算法的基础上进行改进, 依次使用从低频到高频的观测数据进行迭代求解最小二乘问题, 从而得到多尺度函数的近似展开系数, 进行运动轨迹的反演.

以 $f(t) = (t, -0.42 - 0.1 \cos(0.75t) - 0.05 \cos(6t))$, $t \in [-5, 5]$ 为算例, 具体函数图像如图 16 所示.

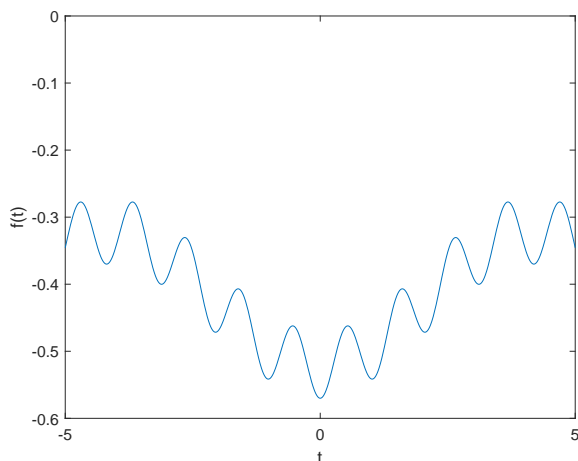


图 16 多尺度函数: $-0.42 - 0.1 \cos(0.75t) - 0.05 \cos(6t)$

针对该函数, 选择三角函数作为基函数进行级数展开. 由于多尺度函数在一个小的范围内产生局部突变, 一个想法是首先选取低频观测数据对于函数图像的整体轮廓和低频信息进行反演, 再通过高频观测数据得到边缘、纹理等高频细节, 从粗到细进行重构. 该思想来源于逆散射问题中的逐次线性化方法^[3].

具体算法的思想如下:

算法 5.1. 多尺度函数反演

输入: 初始猜测 X_0 ;

一系列频率 (从低频到高频) $[k_{\min}, k_{\max}]$;

多频远场观测数据 $Y(k) = u^\infty(k)$;

对函数进行级数展开得到的非线性函数 F ;

输出: 多尺度函数级数展开系数 $X \in \mathbb{R}^n$

for $k = k_{\min}$ to k_{\max} **do**

$X = \arg \min_{X \in \mathbb{R}^n} \|F(X, k) - Y(k)\|$

$X_0 = X$

end for

return X ;

STOP.

通过观察函数图像, 可以发现在长度为 10 的大尺度上, 函数整体呈现先下降再上升的趋势; 在长度约为 0.2 的小尺度上, 曲线会有一个小范围内较大的变化. 考虑频率 k 与波长 λ 之间的关系:

$$\lambda \sim \frac{2\pi}{k},$$

可以大致得到二者之间的对应:

表 11 频率与波长的大致对应关系

频率 k	波长 λ
0.6	10.47
1	6.28
3	2.09
10	0.63
30	0.21
40	0.16

为了更加好地对曲线的大尺度趋势与小尺度细节进行合适的反演, 选取频率范围为 $[k_{\min}, k_{\max}] = [3, 50]$, $k_j = k_{\min} + (j-1)\frac{k_{\max}-k_{\min}}{m}$ ($j = 1, 2, \dots, m; m = 10$), 观测方向的选取与表 7 相同, $t_{\min} = -5, t_{\max} = 5$, 级数展开项数 $n = 17$, 则多尺度函数展开为 $f(t) = \sum_{i=1}^{17} a_i \phi_i(t)$, 其中 $\phi_i(t)$ 为三角基函数. 则最小二乘问题具体表达为:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{17}} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^L \left| \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} e^{-ik_j [\hat{x}_\ell \cdot (t, \sum_{i=1}^{17} a_i \phi_i(t)) - t]} - Y_\ell(k_j) dt \right|^2. \quad (5.1)$$

在算法 5.1 中初始猜测选择为 $X_0 = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{17}$, 在噪音影响下得到的反演结果如图 17

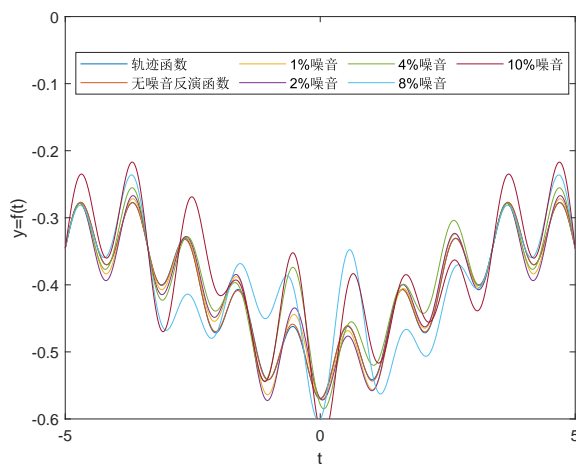


图 17 不同噪音影响下多尺度函数在多个观测方向下的反演

反演误差如表 12

表 12 多尺度函数反演不同噪音水平下的误差

噪音水平	误差
无噪音	3.5526e-03
1%	2.4268e-02
2%	3.1879e-02
4%	8.7917e-02
8%	1.1541e-01
10%	1.0951e-01

可以发现递归算法的反演结果在噪音水平较低的情况下具有较好的抗干扰性, 但随着噪音水平的逐步增加, 小尺度部分的反演会先受到影响, 误差变大. 如果仅选择高频数据 ($k \in [40, 50]$) 或低频数据 ($k \in [0.1, 0.6]$) 进行反演, 得到的结果不具有良好的精确性, 这两种情况的反演结果如图 18 所示.

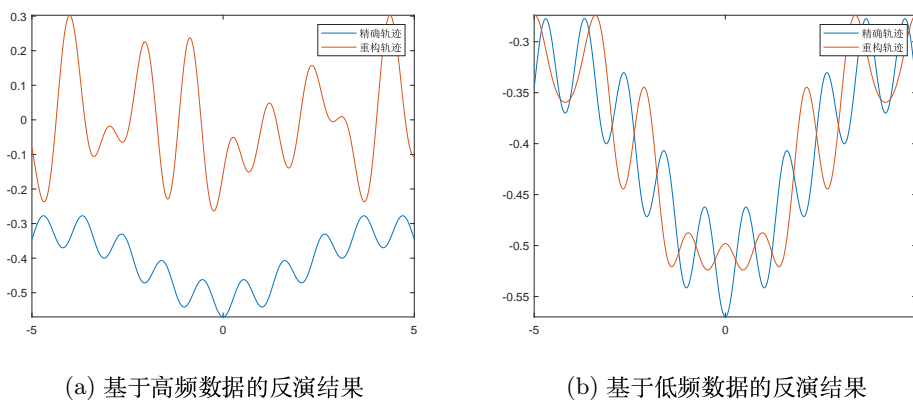


图 18 多尺度函数反演结果

6. 总结和未来工作

本文通过大量数值实验, 验证了基于 Levenberg-Marquardt 的多频优化算法在重构频率域点源轨迹函数问题中的有效性和准确性. 根据频域数据携带的波长信息, 可以有效克服算法关于初始猜测的敏感性. 本文主要聚焦于频域算法关于频域区间、观测方向个数、噪音水平以及轨迹函数的截断阶数、光滑性等参数的敏感性研究, 针对时域模型的结果因篇幅原因未给出详细的说明, 但本文算法同样适用于时域模型, 并且在先验知道移动点源的数目信息时, 稍加改进就可以重构空间中同时存在的多个轨迹函数的情形.

本文的核心技术之一是根据轨迹函数的先验信息进行有限维参数化逼近. 我们采样三角函数和多项式函数逼近光滑函数, 采用 B 样条函数逼近分片线性函数取得了不错的效果. 在进行数值求解时, 需要重点关注关键参数的调控, 如针对周期运动轨迹函数, 多频远场观测数据的频率区间需与轨迹的频率相匹配. 同时要针对轨迹函数的特性选择适配的逼近方式, 截断参数等. 最后, 可以通过增加观测方向来提升重构的精确度与抗噪音干扰能力.

根据神经网络的通用逼近定理, 任意的连续轨迹函数可以用多层神经网络函数进行近似. 根据此定理并结合非线性优化或数学物理模型, 也可以设计运动轨迹的定位追踪算法. 我们将在后续工作中开展这项研究.

参 考 文 献

- [1] Angel T, Kirsch A, Kleinmann R. Antenna control and generalized characteristic modes, Proc[J]. IEEE, 1991, 79: 1559–1568.
- [2] Bao G, Hou S, Li P. Inverse scattering by a continuation method with initial guesses from a direct imaging algorithm[J]. J. Comput. Phys., 2007, 227(1): 755–762.

-
- [3] Bao G, Li P, Lin J, Triki F. Inverse scattering problems with multi-frequencies[J]. *Inverse Problems*, 2015, 31(9): 093001.
- [4] Badia A E, Ha-Duong T. On an inverse source problem for the heat equation. Application to a pollution detection problem[J]. *Journal of inverse and ill-posed problems*, 2002, 10(6): 585–599.
- [5] Borcea L, Callaghan T, Papanicolaou G. Synthetic aperture radar imaging with motion estimation and autofocus[J]. *Inverse Problems*, 2012, 28(4): 045006.
- [6] Chen B, Guo Y, Ma F, Sun Y. Numerical schemes to reconstruct three-dimensional time-dependent point sources of acoustic waves[J]. *Inverse Problems*, 2020, 36(7): 075009.
- [7] Fischer A, Izmailov A F, Solodov M V. The Levenberg-Marquardt method: an overview of modern convergence theories and more[J]. *Comput Optim Appl.*, 2024, 89: 33–67.
- [8] Guo H, Hu G, Ma G. Imaging a moving point source from multifrequency data measured at one and sparse observation directions (Part I): Far-field case[J]. *SIAM J. Imaging Sci.*, 2023, 16: 1535–1571.
- [9] Guo H, Hu G. Inverse wave-number-dependent source problems for the Helmholtz equation[J]. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2024, 62: 1372–1393.
- [10] Guo Y, Li H, Wang X. A novel time-domain direct sampling approach for inverse scattering problems in acoustics[J]. *SIAM J. Appl. Math.*, 2024, 84(5): 2152–2174.
- [11] Hu G, Kian Y, Li P, Zhao Y. Inverse moving source problems in electrodynamics[J]. *Inverse Problems*, 2019, 35: 075001.
- [12] Hu G, Kian Y, Zhao Y. Uniqueness to some inverse source problems for the wave equation in unbounded domains[J]. *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.*, 2020, 36: 134–150.
- [13] Isakov V. *Inverse Source Problems*[M]. AMS, Providence, RI, 1989.
- [14] Jebawy H A, Elbadia A, Triki F. Inverse moving point source problem for the wave equation[J]. *Inverse Problems*, 2022, 38: 125003.
- [15] Li P, Yuan G. Increasing stability for the inverse source scattering problem with multi-frequencies[J]. *Inverse Problems*, 2017, 11: 745–759.
- [16] Nakaguchi E, Inui H, Ohnaka K. An algebraic reconstruction of a moving point source for a scalar wave equation[J]. *Inverse Problems*, 2012, 28(6): 065018.
- [17] Ohe T, Inui H, Ohnaka K. Real-time reconstruction of time-varying point sources in a three-dimensional scalar wave equation[J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(11): 115011.
- [18] Ohe T. Real-time reconstruction of moving point/dipole wave sources from boundary measurements[J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2019: 1–46.
- [19] Rashedi K, Sini M. Stable recovery of the time-dependent source term from one measurement for the wave equation[J]. *Inverse Problems*, 2015, 31(10): 105011.
- [20] Stefanov P D. Inverse scattering problem for moving obstacles[J]. *Math. Z.*, 1991, 207: 461–480.
- [21] Wang X, Guo Y, Li J, Liu H. Mathematical design of a novel input/instruction device using a moving emitter[J]. *Inverse Problems*, 2017, 33(10): 105009.